

8/2
2023

Tugas 1 Aljabar I

Nama dan NRP : M. Febryan Khamim (5002221072)
Nama Matrikul : Aljabar 1 (KM184402)
Tanggal deadline : 15 Februari 2023

1) Himpunan G dengan operasi yang diberikan memenuhi aksiomatik dari definisi grup :

a. $G = \mathbb{Z}_5$ dengan operasi mod 5

$$G = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

► Syarat memenuhi aksiomatik grup :

- Tertutup, karena tiap-tiap anggota himpunan $G = \mathbb{Z}_5$ dengan operasi penjumlahan mod 5 memiliki anggota atau hasil yang tetap, yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4\}$
- Asosiatif, untuk setiap elemen (misal : a, b, c) berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$
Contoh : $(1+2)+3 = 1+(2+3)$
- Memiliki elemen identitas = 0
- Setiap elemen punya invers :
 - 0 inversnya 0
 - 1 inversnya 4
 - 2 inversnya 3
 - 3 inversnya 2
 - 4 inversnya 1

Jadi, $G = \langle \mathbb{Z}_5, + \rangle$ adalah Grup

b. $G = U(10)$ dengan operasi perkalian mod 10

$$G = \{1, 3, 7, 9\}$$

x	1	3	7	9
1	1	3	7	9
3	3	9	1	7
7	7	1	9	3
9	9	7	3	1

► Syarat agar $\langle U(10), \times \rangle$ adalah grup :

- Tertutup, karena tiap-tiap anggota himpunan $G = U(10)$ dengan operasi perkalian mod 10 punya anggota tetap, yaitu $\{1, 3, 7, 9\}$
- Asosiatif, untuk tiap elemen.
Contoh : $(1 \times 3) \times 7 = 1 \times (3 \times 7)$
- Punya elemen identitas = 1
- Setiap elemen punya invers :
 - 1 Inversnya 1
 - 3 Inversnya 7
 - 7 Inversnya 3
 - 9 Inversnya 9

Jadi, $G = \langle U(10), \times \rangle$ adalah Grup

2). Tabel grup untuk grup yang diberikan dan menentukan komutatif / tidak

a). $G = S_3$

$$G = \{P_0, P, P', N_1, N_2, N_3\}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Contoh Operasi

$$P_0 \cdot P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = P_0 \text{ (Identitas)}$$

$$P_0 \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = P$$

$$P_0 \cdot P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = P'$$

$$P_0 \cdot N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = N_1$$

$$P_0 \cdot N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = N_2$$

$$P_0 \cdot N_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = N_3$$

$$P \cdot P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = P_0$$

$$P' \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = P_0$$

$$P \cdot N_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = N_1$$

$$N_2 \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = N_3$$

Berbeda, jadi tidak
Komutatif

Tabel Grup $G = S_3$

	P_0	P	P'	N_1	N_2	N_3
P_0	P_0	P	P'	N_1	N_2	N_3
P	P	P'	P_0	N_3	N_1	N_2
P'	P'	P_0	P	N_2	N_3	N_1
N_1	N_1	N_2	N_3	P_0	P	P'
N_2	N_2	N_3	N_1	P'	P_0	P
N_3	N_3	N_1	N_2	P	P'	P_0

Dapat diamati bahwa $P'N_2 \neq N_2P'$,
maka grup tersebut TIDAK KOMUTATIF

b). $G = Q_8$

$$G = \{I, i, j, k, -I, -i, -j, -k\}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-i = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$-j = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-k = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

Contoh Operasi :

$$1. I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$I. i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = i$$

$$I. -j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -j$$

$$-i. j = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -k$$

$$j. -i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = k$$

Berbeda, jadi $G = Q_8$

TIDAK KOMUTATIF

Tabel Grup $6 = Q_8$

	I	i	j	k	-I	-i	-j	-k
I	I	i	j	k	-I	-i	-j	-k
i	i	-I	k	-j	-i	I	-k	j
j	j	-k	-I	i	-j	k	I	-i
k	k	j	-i	-I	-k	-j	i	I
-I	-I	-i	-j	-k	I	i	j	k
-i	-i	I	-k	j	i	-I	k	-j
-j	-j	k	I	-i	j	-k	-I	i
-k	-k	j	i	I	k	j	-i	-I

Dapat diamati bahwa $j \cdot i \neq -ij$,
maka dapat disimpulkan bahwa
grup $6 = Q_8$ TIDAK KOMUTATIF

- 3). Dalam S_3 dapatkan semua elemen a sedemikian hingga $a^2 = P_0 = \text{identitas}$
dan semua elemen b sedemikian hingga $b^3 = P_0$

$$S_3 = \{P_0, P, P', N_1, N_2, N_3\}$$

→ Semua elemen a hingga berlaku $a^2 = P_0 = \text{Identitas}$

① $P_0^2 = P_0 = \text{Identitas}$

bukti : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = P_0$

② $N_1^2 = P_0 = \text{Identitas}$

bukti : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = P_0$

③ $N_2^2 = P_0 = \text{Identitas}$

bukti : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = P_0$

④ $N_3^2 = P_0 = \text{Identitas}$

bukti : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = P_0$

Semua elemen a yang memenuhi adalah P_0, N_1, N_2, N_3

→ Semua Elemen b hingga berlaku $b^3 = \rho_0 = \text{Identitas}$

① $\rho_0^3 = \rho_0 = \text{Identitas}$

Bukti : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \rho_0$

② $\rho^3 = \rho_0 = \text{Identitas}$

Bukti : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \rho_0$

③ $\rho'^3 = \rho_0 = \text{Identitas}$

Bukti : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \rho_0$

Semua elemen b yang memenuhi adalah $\rho_0, \rho,$ dan ρ'

4). Konstruksi semua tabel grup yang mungkin untuk suatu grup G dengan order 4

* Dengan e adalah elemen Identitas.

→

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

→

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

→

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

→

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	c	e	b
b	b	e	c	a
c	c	b	a	e